CHAPITRE 1

HISTOIRE DES CHIFFRES

«Dieu a créé les nombres entiers,
et l'homme a inventé le reste.»
Leopold Kronecker

Cette histoire du calcul débute par l'histoire des chiffres, en s'inspirant de la merveilleuse Histoire universelle des chiffres *de Georges Ifrah.*

Compter

On possède quelques informations quant aux premiers systèmes imaginés par l'homme pour compter les éléments d'un ensemble, tels que le nombre de bêtes constituant un troupeau.

L'un des premiers systèmes consistait à associer autant de nœuds sur une corde que de têtes de bétail. En associant un nœud à chacun des animaux passant devant soi lors de leur retour à l'étable, il était aisé de détecter une bête manquante. Mais la difficulté majeure résidait dans la confection même de la corde à nœuds, où des erreurs pouvaient survenir. Un autre système consistait à pratiquer des entailles sur un bâton ou un os, mais le problème demeurait là aussi de compter ces entailles. L'homme, comme l'animal supérieur, possède des capacités de perception limitées lorsqu'il s'agit d'estimer un nombre d'objets supérieur à 4 ou 5 éléments. Impossible pour lui, par exemple, d'évaluer le nombre exact de cailloux dans un tas. Il lui faut pour cela les compter.

La pratique des encoches sur les parois de cavernes à côté de dessins de divers animaux constitue la toute première comptabilité, consistant à enregistrer et à compter les animaux selon leur genre. L'entaille est réalisée partout avec à peu près la même méthode, et il est peu surprenant que ce système soit adopté tant en Europe qu'en Asie, en Afrique ou en Amérique. Partout ou presque, le «un» se symbolise par un trait vertical.

L'usage d'encoches pratiquées sur des os date de près de 20 000 ans. Dès cette époque, on observe une répartition par groupes de ces encoches lorsque leur nombre dépasse quelques dizaines. On voit donc déjà là une décomposition selon le principe des bases, lequel sera le fondement des systèmes de numération à venir.

Pour dénombrer des objets, le premier stade est pictural. On représente par exemple 4 dessins de vaches pour indiquer un troupeau composé de 4 vaches. Le stade suivant est symbolique: le même troupeau est alors représenté par un dessin d'une vache suivi de 4 traits. Ces quatre traits représentent le nombre 4, devenu alors une entité plus abstraite et pouvant qualifier tout ensemble d'objets [2].

Les premiers systèmes de numération

Impossible, en comptabilité, de tenir des livres de comptes de façon «orale». C'est pour cette raison que naquirent l'écriture et les chiffres, à Sumer, entre le Tigre et l'Euphrate [11, 12, 13]. Les premières tablettes d'argile qui y ont été découvertes sont des comptes agricoles, comportant à la fois des pictogrammes et des chiffres.

Les premiers systèmes de numération sont dits «additifs». Ils proposent des représentations de un à quatre comportant un à quatre signes, comme les chiffres romains I, II, III, IIII, avec un nouveau symbole V pour le cinq. On fait de même avec les chiffres suivants, VI, VII, VIII, VIIII et un nouveau symbole X pour le dix. Un grand nombre de civilisations ont adopté ce schéma dans leur système (Sumer, Egypte, Grèce, Mésopotamie, les Mayas, les Phéniciens) plus de 1000 ans avant notre ère. Une telle numérotation additive devient cependant vite compliquée avec de très grands nombres.

Le système de numération additif de Sumer

Ce système est le plus ancien et date d'environ 3200 avant J.-C. Il utilise des symboles différents pour les unités et les dizaines, et des symboles particuliers pour représenter 60, 600, 3600, 36 000 et 216 000 (fig. 1.1). C'est donc un système reposant sur la base 60 [1], et comportant deux formes, l'une dite archaïque, et l'autre plus récente dite cunéiforme. Pour former des nombres, on dessine autant de symboles que nécessaire (fig. 1.2).

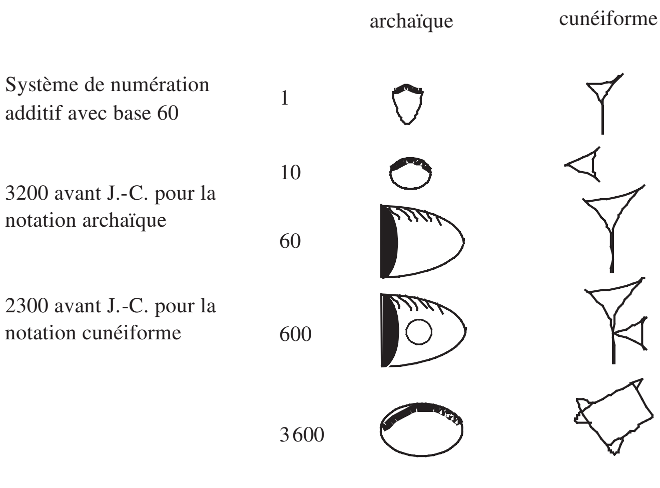
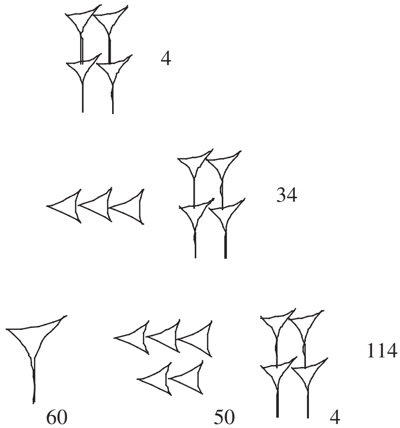


Fig. 1.1 Système de numération additif en base 60 de Sumer.



Tablette sumérienne
de 2000 avant J.-C.
II[e] dynastie d'Ur

On comprend le
mécanisme du système
additif:

60 reproduit 1 fois = 60
10 reproduit 5 fois = 50
1 reproduit 4 fois = 4
SOMME = 114

Fig. 1.2 Système additif de Sumer.

Les Sumériens sont les seuls dans l'histoire à avoir inventé un tel système de numération sexagésimal, mais les raisons du choix d'une base si élevée demeurent obscures. Le fait que l'année comporte près de 360 jours, ou que le nombre 60 ait été attribué au Grand Dieu Anu constituent les principales hypothèses.

On constate cependant que les symboles 10 et 600 (empruntés à la base 10, 600 représentant 60×10 et non 60×60) coexistent avec les symboles de la base 60 (1, 60, 3600, 216 000). La base 10 peut donc être considérée comme une base auxiliaire. On sait aussi qu'une base 12 coexistait à Sumer avec la base 60; cette dernière pourrait donc être la combinaison des bases 10 et 12.

Cette notation persista en Mésopotamie sous domination de Babylone, mais elle se transforma peu à peu en ajoutant des symboles correspondant à la base 10 (un symbole pour le 100, un autre pour le 1000), et mena à la coexistence de deux manières de représenter les nombres, c'est-à-dire en base 60 ou en base 10.

Le système de numération additif égyptien

L'écriture égyptienne, basée sur les hiéroglyphes, date de plus de 3000 ans avant Jésus-Christ. On la lit généralement de droite à gauche, le sens de lecture étant donné par l'orientation des oiseaux ou des têtes des personnages [11]. Cette écriture et le système de numération associé se sont développés indépendamment de ceux de Sumer, en adoptant notamment une base décimale pour le calcul.

Le système de numération additif égyptien [2] est apparu peu de temps après l'invention de l'écriture. Il a d'abord existé sous forme de hiéroglyphes, puis sous forme hiératique (sacrée), et enfin sous forme démotique (populaire).

☞ La figure 1.3 illustre ce système basé sur les hiéroglyphes. Le nombre 1 est un simple bâton (ou encoche). Le nombre 10 est représenté par un symbole pouvant être un seau ou un sac renversé contenant 10 objets. Le nombre 100 est une corde enroulée, probablement longue de 100 unités. Le nombre 1000 est une plante de lotus. Il existe encore des symboles différents pour représenter 10 000 (un doigt pointant le ciel), 100 000 (grenouille) et 1 000 000 (homme agenouillé). L’écriture d’un nombre est très régulière mais devient vite fastidieuse quand le nombre est grand. Celui-ci doit être lu de droite à gauche, bien que l’on trouve parfois quelques nombres écrits de gauche à droite.

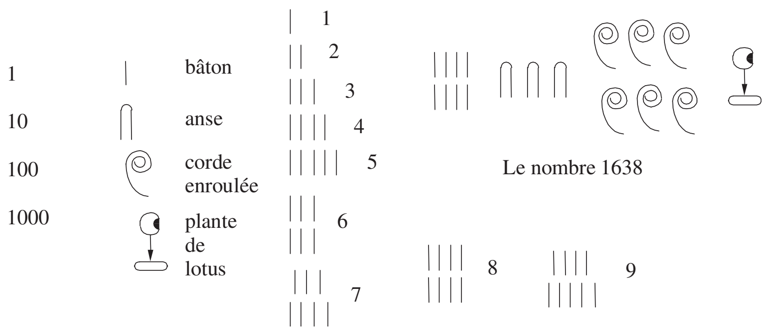


Fig. 1.3 Les nombres égyptiens en hiéroglyphes.

L’écriture hiéroglyphique était principalement utilisée pour les inscriptions sur des monuments.

Celle sur papyrus, dite hiératique, fut beaucoup plus utilisée, car d’un usage plus aisé. L’emploi de cette écriture cursive, dont les symboles sont très différents des hiéroglyphes, a subsisté fort longtemps pour la rédaction de textes religieux, usage dont elle tire son nom. Une autre écriture cursive, dite démotique, est quant à elle apparue vers le XII^{e} siècle avant Jésus-Christ, et employée principalement pour les usages courants.

☞ Dans ce système, l’addition s’effectue en regroupant tous les chiffres de même catégorie, puis en remplaçant dix signes identiques par un seul signe de la classe décimale supérieure. Pour la multiplication, on utilise une méthode de doublement successif. Prenons par exemple la multiplication de 12 par 12. Avec nos chiffres, on place le multiplicateur dans la deuxième colonne, la première colonne indiquant par quel nombre il est multiplié. On s’arrête dès que le doublement produit un résultat plus grand que le multiplicande, ici à 8 par 12 qui donne 96. Comme on veut multiplier par 12 et non pas par 8, on cherche les résultats partiels qui correspondent à la multiplication de 12 – 8 = 4. Or on sait que 4 fois 12 a déjà été calculé; il faut donc additionner ces deux résultats partiels pour obtenir le résultat final.

	1	12		
	2	24		
>	4	48	v	
	8	96	v	soit 96 + 48 = 144

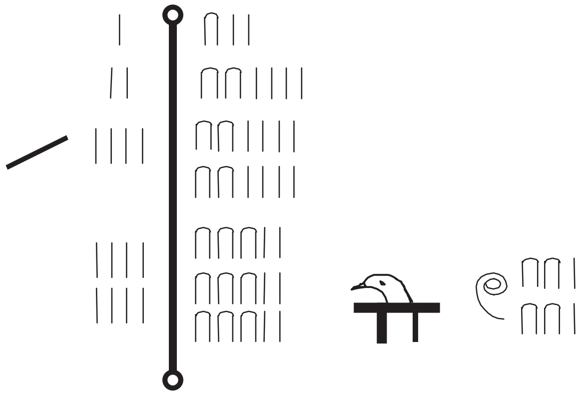


Fig. 1.4 Multiplication avec le système égyptien basé sur les hiéroglyphes.

La figure 1.4 représente la multiplication 12 par 12 avec les chiffres hiéroglyphiques égyptiens. Cet algorithme de multiplication par doublements successifs est, malgré son grand âge, le même que celui utilisé aujourd'hui encore dans les ordinateurs dépourvus de multiplicateur réalisé en matériel. Cet algorithme est connu sous le nom d'additions et décalages. Il consiste pour chaque pas de la multiplication à décaler à gauche le multiplicande et à l'additionner ou non selon le chiffre du multiplicateur. Un décalage à gauche du multiplicande revient à le doubler (fig. 1.15).

Le système de numération additif grec

Les Grecs utilisaient deux systèmes de notation de chiffres [2].

Le premier, très semblable au système égyptien, est le système attique, dont l'usage était en vigueur à Athènes. Il a pour particularité que, le «un» mis à part, ses chiffres sont les initiales des noms grecs correspondants. Le chiffre 5 est Pi, initiale de Pénté signifiant 5 en grec, le chiffre 10 est Delta, initiale de Déka signifiant 10. Un tel système est dit acrophonique.

Le deuxième système est celui des chiffres alphabétiques, illustré par la figure 1.5, qui utilise un très grand nombre de symboles, et permet par conséquent de coder un nombre avec peu de symboles. 96 est par exemple codé avec 15 symboles dans le système égyptien, alors que 2 symboles suffisent dans le système grec. Ce système présente l'avantage d'une économie de symboles, mais exige toutefois de mémoriser un grand nombre d'entre eux.

De tels systèmes ne sont plus plus en usage aujourd'hui, mais le principe additif demeure utilisé pour nommer les chiffres et les écrire avec nos lettres [1].

☞ Les dix premiers chiffres ont leurs propres noms, de un à neuf, puis dix, et l'on forme ensuite les suivants par addition, soit 1 + 10, un-dix, proche de onze (*undecim* en latin), puis 2 + 10, deux-dix, soit douze. A partir de dix-sept, la combinaison 7 + 10 est explicite, même si elle se dit à l'envers. Pour obtenir trente, quarante, etc., on procède par multiplication, soit 3 fois

10, 4 fois 10, etc. Seul le français parlé en France demeure particulier avec l’usage de «soixante-dix» ou «quatre-vingt-dix» au lieu de septante ou nonante. Reste le problème de vingt (on ne dit pas «duante»). Il faut remonter très loin, au sanskrit, langue indo-européenne, dans laquelle vingt se disait «vimsati» (soit dvi-sati, deux dizaines), proche du latin «viginti» et de «vingt» en français, pour en découvrir l’origine.

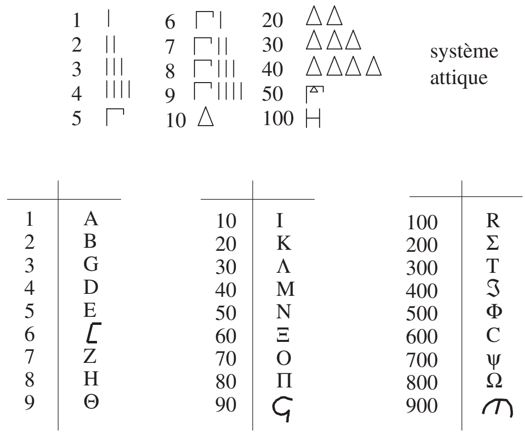


Fig. 1.5 Les chiffres attiques et alphabétiques des Grecs.

Le système de numération additif romain

Un autre exemple de système de numération additif est celui basé sur les chiffres romains. Comme ceux des Etrusques, ces chiffres puisent leur origine dans la pratique des entailles sur des bâtons.

Avec ce système, on écrit par exemple le nombre 77 généralement LXXVII, bien qu’il ne soit pas nécessaire de débuter par les symboles les plus grands [2]. Ecrire VIILXX ne serait pas ambigu, mais beaucoup plus difficile à lire.

La principale difficulté de ce système ne réside pas dans l’addition (fig. 1.6a), mais dans la multiplication, qui demande une décomposition préalable du multiplicateur. Ainsi, 13 se décompose en 10 + 2 + 1, ce qui revient à faire une addition avec 10 fois le nombre, 2 fois le nombre plus le nombre lui-même. On donne un autre exemple à la figure 1.6(b), avec la multiplication de 23 par 13.

Une autre règle veut qu’un chiffre placé à gauche d’un chiffre de valeur supérieure s’en retranche, comme IX pour le 9 ou XL pour 40. On vise ainsi à l’économie de symboles, bien que cela rende d’autant plus compliquée toute opération arithmétique. Cette notation existait déjà au II^{e} siècle après J.-C., mais son usage ne s’est répandu que vers 1600.

(a)	77	=	L	XX	V	II
	+94	=	L	XXXX		IIII
	171	=	LL	XXXXXX	V	IIIII

On applique alors les règles IIIII = V, VV = X, XXXXX = L, LL = C, et l'on obtient:

171	=	LL	XXXXXX	VV	I
171	=	LL	XXXXXXX		I
171	=	LLL	XX		I
171	=	CL	XX		I

(b)	XX III	(×1)
	XX III XX III	(×2)
	CC XXX	(×10)

Total: CC XXX XX XX XX III III III, soit CC L XXXX V IIII, soit 299

Fig. 1.6 Addition (a) et multiplication (b) en chiffres romains.

Les bases

Si la base 10 s'est peu à peu imposée dans le monde entier, d'autres bases ont été longtemps utilisées, voire le sont toujours. C'est le cas, par exemple chez les peuples khmer et caraïbes, de la base 5 et dont l'origine est liée au cinq doigts de la main. Les Esquimaux, les Mayas et les Aztèques utilisaient la base 20 (comme les doigts des mains et des pieds additionnés) et son système associé, dit vigésimal. On trouve encore de nos jours des traces de ce système dans le «quatre-vingt» du français (seuls les Vaudois disent huitante), ou le «trois-vingts» et «six-vingts» utilisés autrefois pour 60 et 120.

Les langues danoise et basque nomment aussi certains nombres de cette manière.

De nos jours, on utilise encore la base 60 pour la mesure du temps (une heure comporte 60 minutes de 60 secondes) et celle des angles (un cercle est bizarrement partagé en 360°). Swatch a récemment lancé le nouveau standard Internet Time (@300 ou @456), dans lequel le jour est divisé en 1000 «beats», à l'instar du calendrier républicain qui, durant les 13 ans suivant la Révolution française où il fut en usage, introduisit des jours de 10 heures de 100 minutes.

Numération de position

Pour remédier aux problèmes de calcul posés par la numération additive, on imagina une autre numération, dite «de position», où la localisation d'un chiffre dans un nombre lui confère une valeur particulière. C'est ainsi que les unités, les dizaines ou les centaines furent inventées, sur le principe d'une base dix. Ainsi, 248 est composé de 2 centaines, 4 dizaines et 8 unités.

Ce système a été inventé trois fois, d'abord par les Babyloniens au 2^e millénaire avant Jésus-Christ, puis par les Chinois un peu avant le début de notre ère et enfin par les Mayas [1]. Mais c'est à Mari, en Mésopotamie, que furent retrouvées les traces les plus anciennes de cette numération, qui datent du 18^{e} siècle avant Jésus-Christ.

Le système positionnel de Mari

Ce système fut découvert en 1933, lorsque des fouilles sur le site mirent à jour près de 20 000 tablettes de comptes, utilisées comme listes de besoins pour la vie quotidienne. Comme le montre la figure 1.7, ce système utilisait le symbole du clou pour représenter à la fois les unités (soit de 1 à 9 clous pour les chiffres 1 à 9) et les centaines, et un autre symbole pour représenter les dizaines. Selon sa position, le clou prenait donc la valeur d'unité ou de centaine, caractéristique d'un système positionnel (l'usage d'un symbole différent pour les dizaines lui interdisant toutefois cette appelation *stricto sensu*).

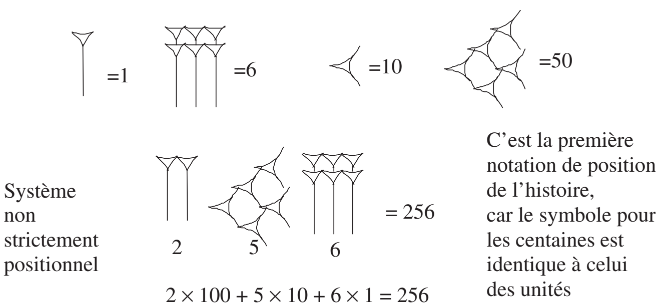


Fig. 1.7 Système non strictement positionnel de Mari (1800 avant J.-C.).

On pense que ce système est apparu de manière progressive. Si l'on se reporte au système antérieur non positionnel de Babylone (fig. 1.1 et 1.2), on constate que le petit clou représentait les unités et le grand clou les soixantaines. Il semble que, petit à petit, la valeur de la différence de taille s'est amenuisée au profit de la position du symbole, avant de disparaître complètement. Il est en effet probable que la similitude entre les symboles représentatifs des unités et des centaines utilisés dans le système de numération additif soit à l'origine de l'apparition du système de numération positionnel.

Le système positionnel de Babylone

Les Babyloniens utilisaient un système de numération positionnel à base 60 (fig. 1.8). Les symboles pour les dizaines et les unités étaient compris dans le même ordre, la base 10 constituant une base auxiliaire (il serait fastidieux de dessiner 41 ou 56 petits clous!). On utilisait le même ensemble de symboles pour représenter les unités (de 1 à 59), les soixantaines (de 1 × 60 à 59 × 60), et ainsi de suite.

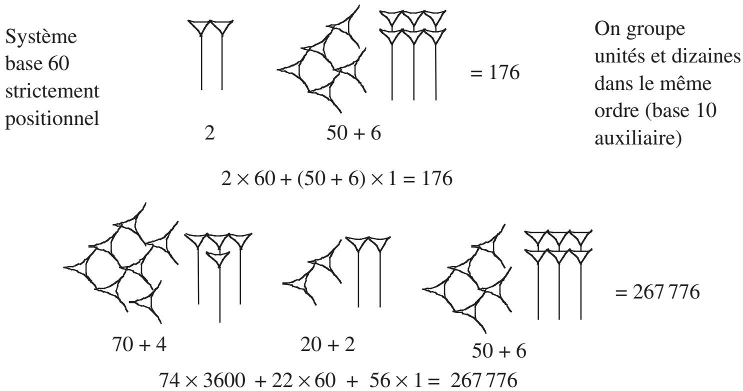


Fig. 1.8 Système positionnel base 60 de Babylone.

Une des difficultés de ce système résidait dans l'écriture de certains nombres, notamment ceux comportant un zéro en position intermédiaire (exemple: 206)

Les savants babyloniens ne connaissaient pas le zéro, ce qui constituait une difficulté majeure pour calculer [1]. En base 60, la soixantaine était représentée par un clou, identique au clou représentant l'unité. Ainsi, pour représenter 60, il aurait fallu faire suivre ce clou de quelque chose d'analogue au zéro pour comprendre que l'on parlait de soixantaines et non d'unités. Mais un clou isolé pouvait signifier 1, 60 ou 3600! On connaît un certain nombre d'exemples de nombres représentés sur une tablette qui sont ambigus (fig. 1.9).

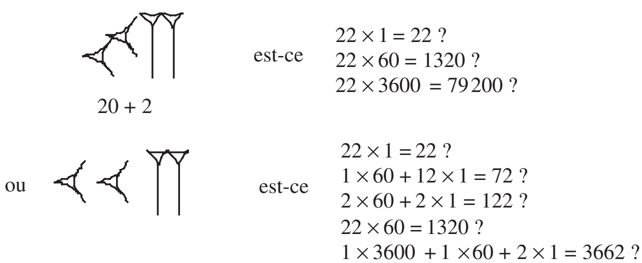


Fig. 1.9 Exemple de difficultés d'interprétation du système positionnel de Babylone.

Dès le IV^{e} siècle avant Jésus-Christ, on utilise un espace ou un signe de séparation pour signifier l'absence d'un chiffre d'un rang donné: c'est le plus vieux zéro de l'histoire. Mais insérer un espace peut être source d'erreur, car un scribe peu au fait de ces difficultés ne le retranscrira pas, et changera sans s'en apercevoir la valeur du nombre.

Un signe particulier est introduit vers 300 avant J.-C. pour représenter le zéro (fig. 1.10) mais il n'est utilisé qu'en position médiane et non terminale, et ne résout donc pas les problèmes posés par le système. Ce zéro n'est pas utilisé en tant que nombre zéro mais comme symbole représentant un vide.

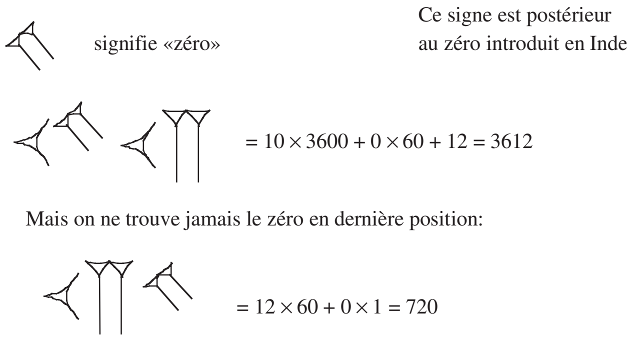


Fig. 1.10 Un signe introduit comme «zéro».

Le système positionnel chinois

La notation positionnelle chinoise date de 540 avant J.-C., certaines données remontant même à 1300 avant J.-C. [2]. Les chiffres 1 à 5 sont symbolisés par 1 à 5 bâtons, les chiffres 6 à 9 par 1 à 4 bâtons surlignés. Les Chinois inventent un système ingénieux pour fixer le rang du chiffre. Les bâtons sont verticaux pour représenter les unités, les centaines, les dizaines de milliers, etc, et horizontaux pour représenter les dizaines, les milliers et les centaines de milliers (fig. 1.11). Ainsi, si deux groupes de symboles sont verticaux, c'est qu'il y a un espace symbolisant un «zéro» entre les deux. Mais lorsque l'on doit, par exemple, représenter 4000, l'ambiguïté subsiste.

Des damiers fixant les positions des chiffres permirent de laisser un espace vide pour symboliser le «zéro», là encore non opératoire. Celui-ci fut remplacé par un petit rond vers 800 après J.-C., mais on sait que ce «zéro opératoire» fut probablement introduit après divers contacts antérieurs avec l'Inde.

Le système positionnel maya

Les Mayas, au 1er millénaire de notre ère, utilisent une numération de position en base 20. Ils inventent le zéro entre le IV^{e} et le IX^{e} siècle après Jésus-Christ en le symbolisant par un petit coquillage. Mais par une curieuse irrégularité dans leur base 20 (au lieu de 1, 20, 400 et 8000, ils utilisent 1, 20, 360 et 7200), le zéro n'est pas opératoire et ne permet pas de calculer.

Ce particularisme peut s'expliquer par les 360 jours que comportait l'année maya. Comme pour les Babyloniens, le zéro représentait ici un espace vide et non un signe opératoire.

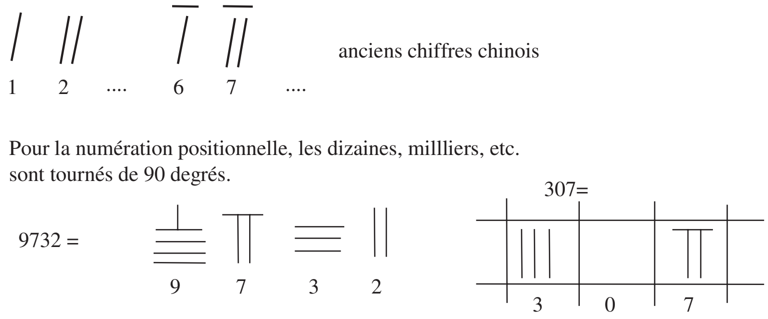


Fig. 1.11 Numération positionnelle chinoise.

Un tel système fut utilisé pour le calendrier dit «long compte» des Mayas classiques [3], dont les mythes rapportent l'apparition vers 3113 avant Jésus-Christ, et dont l'usage ne devint courant que lors des premiers siècles de notre ère.

☞ La figure 1.12 illustre une date de ce calendrier. Les différents dessins sont appelés des glyphes. Le premier glyphe est introducteur; il indique que l'inscription qui suit est une date «long compte». La numérotation de position est ensuite utilisée:

- premier glyphe «baktun» (en-dessous à gauche), le grand cycle de 144 000 jours, soit 20 fois 7200 jours. On y voit une barre et quatre points, soit 5 + 4 = 9 baktun, soit 9 × 144 000 jours
- deuxième glyphe «katun» (à la droite du premier), un cycle de 7200 jours. On y voit deux barres et quatre points, soit (2 × 5) + 4 = 14 katun, soit 14 × 7200 jours
- troisième glyphe «tun» (en dessous à gauche), un cycle de 360 jours. Il y a 3 barres et à nouveau 4 points, soit (3 × 5) + 4 = 19 tun, soit 19 × 360 jours
- quatrième glyphe «uinal» (à la droite du premier), un cycle de 20 jours. Il y a une seule barre et trois points, soit 5 + 3 = 8 uinal, soit 8 × 20 jours
- enfin, en dessous à gauche, le dernier glyphe «kin» (un jour) de cette date comporte un signe en forme de papillon qui signifie «zéro».

On peut donc lire cette date comme suit:

9 × 144 000 jours + 14 × 7200 jours + 19 × 360 jours + 8 × 20 jours + 0 jours = 1 403 800 jours (environ 3846 ans) à compter depuis 3113 avant notre ère, ce qui donne environ 730 après Jésus-Christ.

Le système positionnel aztèque

Le système positionnel aztèque est cohérent par rapport à celui des Mayas, et utilise le 1, 20, 400 et 8000 [4]. La position 20 est un compte (*cem-poalli*), la position 400 est une chevelure (*cen-tzontli*) et la position 8000 est un sac (*ce-xiquipilli*). Les différentes positions sont représentées par des idéogrammes, un rond pour 1, un drapeau pour 20, une plume ou un fagot pour 400 et un sac pour 8000 (fig. 1.13).

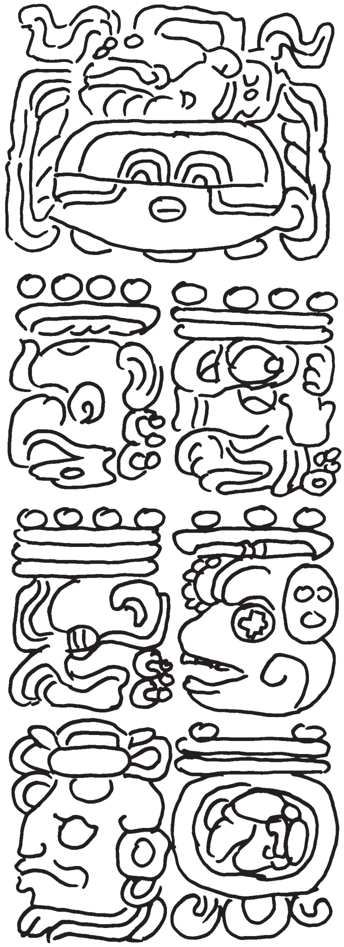


Fig. 1.12 Date dans le calendrier maya.

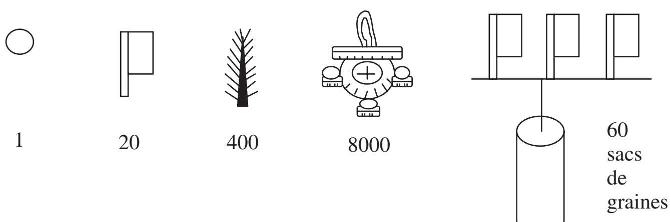


Fig. 1.13 Les chiffres aztèques.

Systèmes de numération de position avec zéro opératoire

Le système de numération indien

C'est à l'Inde que nous devons notre système de numération moderne. On le qualifie à tort de numération «arabe», car les Arabes n'ont joué qu'un rôle d'intermédiaires entre l'Inde et l'Occident.

Le plus ancien document faisant état de calculs avec le zéro date de 458 de notre ère: il s'agit d'un traité de cosmologie, le *Lokavibhâga*, soit «Les parties de l'Univers». Ce document prouve qu'un système de numération de position avec zéro opératoire est en usage en Inde dès le IV^{e} siècle, au beau milieu de l'époque classique indienne de l'empire des Gupta (240-535), renommée pour sa très haute expression culturelle et artistique.

La figure 1.14 représente des chiffres indiens 0 à 9 et montre une similitude avec nos chiffres arabes (au moins pour 1, 2 et 3). On pense que la graphie de ces chiffres a évolué à partir de l'ancienne notation consistant en un trait pour le un, deux traits pour le deux, etc.

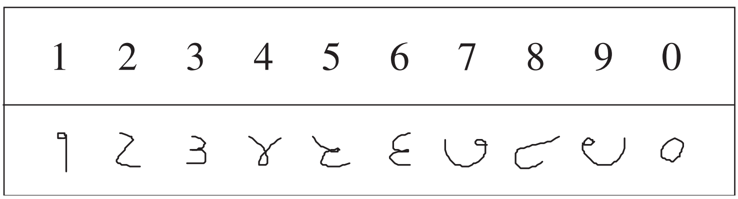


Fig. 1.14 Ecriture des chiffres indiens dans la région de Bombay.

Un des avantages majeurs de ce système est qu'il permet d'exprimer de très grands nombres, en ajoutant à droite autant de zéros que désiré. En Inde, un nom avait ainsi été donné à chaque ordre, jusqu'au 18^{e} (1 suivi de 18 zéros). Les Romains n'avaient pas la possibilité d'exprimer des nombres au-delà de 100 000 et il fallut attendre l'an 1270 pour que le français introduise le mot «million» à la suite des 3 autres ordres (mille, dix-mille, cent-mille). Au milieu du XVII^{e} siècle apparaissent les termes de billion, trillion, quadrillion, etc, signifiant respectivement 10^9, 10^{12}, 10^{15}, jusqu'au nonillion égal à 10^{30}. L'anglais a conservé le billion pour 10^9, alors que le français parle de milliard et que l'actuel billion est un million de milliards, soit 10^{12}, le trillion un million de billions, soit 10^{18}. Le quadrillion est quant à lui absent du *Petit Larousse*. Notons que le plus grand nombre possédant une signification physique est 10^{42}, soit le rapport entre les diamètres de l'Univers et d'un atome, égal au nombre de protons et de neutrons dans l'Univers.

Le système de numération arabe

Nombreux sont ceux qui croient que les chiffres ainsi que le zéro sont dus aux Arabes. L'introduction dans le monde arabe de la numération de position indienne n'a toutefois eu lieu qu'entre 750 et 800, au début de l'âge d'or de la science arabe, comme en témoigne la visite de savants indiens en terre d'Islam en 776. Un autre système basé sur les lettres arabes a toutefois été utilisé simultanément. Quelques années plus tard, le grand savant arabe Al-Khuwarizmi (783-850) écrit un livre intitulé Al Jabr. *Ce titre, ainsi que le nom de ce savant, sont respectivement à l'origine des mots «algèbre» et «algorithme».*

L'introduction en Europe de la numération indienne prit quelques siècles. L'instigateur en fut Léonard de Pise (1175-1250), connu sous le nom de Fibonacci. Il est l'auteur du *Livre de l'Abaque*, dont le succès fut très limité – vraisemblablement à cause des 459 pages fastidieuses à copier qu'il comporte – dans lequel il décrit les chiffres arabes. En 1299, la Ville de Florence interdit l'usage des chiffres arabes, parce l'on pouvait facilement transformer un 0 en un 9 ou un 6.

Une première introduction, sans le zéro, eut lieu au X^{e} siècle par le moine Gerbert d'Aurillac, qui deviendra pape en l'an mille. On n'utilisait alors les chiffres arabes que pour le calcul sur abaques, l'usage des chiffres romains restant très majoritairement prédominant.

La numération arabe, cette fois accompagnée du zéro, réapparut au XII^{e} siècle, dans la foulée des croisades. Elle se heurta une fois encore à une vive hostilité de la part des détenteurs du savoir du calcul sur abaques, ainsi que des membres de l'Eglise, qui qualifiaient cette invention «arabe» de maléfique. Son introduction fut si lente qu'en 1575, Montaigne, fort de sa célèbre devise «Que sais-je?» écrit qu'il ne sait pas calculer (chap. 2).

L'abaque à calcul, appelée aussi échiquier, a ainsi subsisté longtemps encore. Le ministre des finances anglais porte aujourd'hui encore le titre de «Chancelier de l'Echiquier».

Le système de numération de position avec le zéro est un système parfait et universel, contrairement à la tour de Babel de nos multiples langues. Il a permis le développement des mathématiques ainsi que celui des machines à calculer et des ordinateurs, bien que ceux-ci travaillent en base 2 et non 10. Ce fut George Boole (1815-1864) qui développa la logique symbolique avec les opérateurs ET, OU et NON, basée sur deux symboles «vrai» et «faux», correspondant aux deux chiffres «1» et «0» de la numération en base 2.

Système de numération en base 2

Dès 1703, Leibnitz montre la très grande simplicité du système binaire qui n'emploie que deux symboles «0» et «1». Les opérations arithmétiques sont en effet extrêmement simples en base 2, et par conséquent idéales pour leur automatisation sur ordinateurs. Les dispositifs dont sont formés les ordinateurs sont des interrupteurs (appelés transistors) qui présentent deux états, «ouvert» ou «fermé», symbolisés par le «0» et par le «1». La base 2 permet donc de réaliser des unités de calcul en base 2 à la fois simples, robustes et peu coûteuses.

☞ La figure 1.15 illustre une manière de réaliser une multiplication en base 2. On utilise l'algorithme d'additions et décalages en vigueur en Egypte vers 1700 avant Jésus-Christ, en multipliant le multiplicande 5 (0101 en binaire) par le multiplicateur 13 (1101 en binaire).

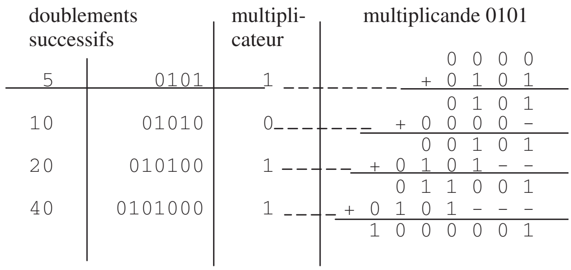


Fig. 1.15 Multiplication en binaire.

Les deux premières colonnes représentent le doublement successif du multiplicande. Ces quantités doivent être ajoutées ou non selon que le bit du multiplicateur (3e colonne, le bit de poids faible en haut) est «1» ou «0». Ainsi, le premier bit de poids faible du multiplicateur étant «1», on ajoute (4e colonne) le multiplicande. Le 2e bit étant «0», on n'ajoute rien. Le 3e bit étant à nouveau «1», on ajoute la quantité «0101--», soit 010100 ou 20 en décimal, soit le multiplicande décalé de 2 positions, correspondant à deux doublements successifs. On procède de même pour le 4e bit du multiplicateur qui est aussi «1», et l'on ajoute la quantité «0101000» décalée d'une position qui est 40 en décimal, le double de 20. On obtient bien le résultat en binaire qui est 5 + 20 + 40 = 65 en décimal.

Système de numération redondant

Inventé il y a quelques dizaines d'années [7], ce système n'est employé qu'en informatique. Il repose sur le principe selon lequel un même nombre peut être représenté de plusieurs manières. Un exemple illustrant deux manières de représenter 1999 est donné à la figure 1.16.

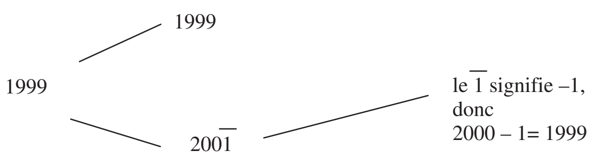


Fig. 1.16 Exemple de numération redondante.

D'après cet exemple ci-dessus, $200\overline{1}$ comporte davantage de zéros que 1999. Multiplier par $200\overline{1}$ devient alors plus simple que de multiplier par 1999. L'addition se simplifie elle aussi. Pour les ordinateurs, la séquence d'opérations s'effectuant depuis les unités vers les dizaines est une opération lente, compliquée par les reports. L'utilisation d'un système de numération redondant permet d'accélérer considérablement l'opération. L'exemple suivant montre toutefois que le système présente quelques subtilités (fig. 1.17).

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 1 \\ X = 2\,4 \\ Y = 1\,7 \\ \hline S = 4\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Or:} \\ 17 = 2\overline{3} \\ \text{car} \\ 20 - 3 = 17 \end{array} \qquad \begin{array}{l} X = 2\,4 \\ Y = 2\,\overline{3} \\ \hline S = 4\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{car:} \\ 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2 = 4 \end{array}$$

Fig. 1.17 Addition sans report.

La figure 1.17 illustre une addition normale (24 + 17), nécessitant un report des unités sur les dizaines. Afin d'éviter le report, on peut représenter le nombre 17 en utilisant une numération redondante, soit $2\overline{3}$. Ainsi, au lieu d'ajouter 17 à 24, on ajoute $2\overline{3}$ à 24: ni la soustraction des unités 4 – 3 ni l'addition des dizaines 2 + 2 n'occasione alors de report. L'usage d'une représentation redondante est particulièrement utile lorsque l'opération comporte des nombres aux chiffres élevés, puisqu'ils produisent inévitablement des reports.

La symbolique des nombres

De tout temps, les hommes ont éprouvé le besoin d'attribuer aux chiffres des propriétés magiques ou des significations ésotériques. On retrouve une multitude de significations dans des manuscrits anciens [5].

La matière, par exemple, est régie par le nombre 4, associé aux quatre éléments air, feu, terre et eau. Le centre du monde est la croix, avec ses quatre branches aux quatre coins cardinaux. L'urbanisme du Moyen Age adopte ce modèle, avec un centre-ville où se situe l'Eglise ou la Cathédrale, et deux rues en croix vers les quatre points cardinaux. Nous trouvons aussi l'Unité, symbolisant Dieu, le binaire, qui représente l'Homme d'un côté et l'Univers de l'autre, le ternaire, qui unit les trois premiers (1 + 2 = 3), et le dénaire, qui représente la perfection (1 + 2 + 3 + 4 = 10). Le roman a repris ce type d'interprétations [10]. Le nombre «onze» transgresse «dix», celui des Commandements, et symbolise le péché [15].

Les principaux concepts

On peut résumer les concepts de manière relativement simple:

– Les premiers systèmes de numération sont additifs, leur principe consiste à représenter autant de symboles qu'il y a d'unités ou de dizaines à dénombrer.
– les systèmes de numération de position, mais sans zéro opératoire, comportent en général des ambiguïtés, en particulier si le ou les zéros doivent être placés à la fin du nombre.
– les systèmes de numération de position avec zéro opératoire, découverts en Inde il y a plus de 15 siècles, constituent le système parfait, et bien sûr celui en usage aujourd'hui en base 10 (et en base 2 pour les ordinateurs). Si 4000 langues existent encore aujourd'hui sur Terre, un seul et unique système de numération s'est imposé.
– un système de numération différent a été inventé il y a quelques dizaines d'années, le système redondant, permettant aux ordinateurs d'effectuer des additions sans report.
– La croyance selon laquelle les Arabes auraient inventé la numérotation de position et le zéro reste vivace [6]. Certains l'attribuent même aux Mayas, «ce peuple merveilleux qui inventa le zéro et l'infini» (relevé lors d'une exposition à Venise en septembre 1998).

Références

[1] Georges IFRAH, *Histoire universelle des chiffres*, Bouquins, Robert Laffont, 1994.
[2] M. R. WILLIAMS, *History of Computing Technology*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, second edition, 1997.
[3] *La Recherche* n° 82, octobre 1977, p. 870.
[4] H. HARVEY, B. WILLIAMS, «L'arithmétique aztèque», *La Recherche* n° 126, Octobre 1981, pp. 1068-1081.
[5] Jean-Pierre BRACH, *La symbolique des nombres*, Collection Que sais-je? PUF n° 2898, 1994.
[6] Mario de BLASI, *Computer Architecture*, Addison-Wesley, 1990, p. 26.
[7] M. J. IRWIN, R. M. OWENS, «Digit-Pipelined Arithmetic as Illustrated by the Paste-Up System: A Tutorial», *IEEE Computer*, April 1987, pp. 61-67.
[8] C. HOUZEL, «L'invention du zéro», *Pour la Science*, n° 228, oct. 1996, pp.12-16.
[9] M. ASCHER, *Mathématiques venues d'ailleurs*, Seuil/sciences ouvertes, 1998.
[10] B. WERBER, *Le père de nos pères*, Albin Michel, Paris, 1998, pp. 64-66.
[11] Georges JEAN, *L'écriture, mémoire des hommes*, 24/Découvertes Gallimard/archéologie, 1987.
[12] «L'univers des nombres», *La Recherche* n° 322, hors série, 2 août 1999.
[13] Samuel Noah KRAMER, *L'histoire commence à Sumer*, Champs, Flammarion, 1994.
[14] Alain SCHÄRLIG, *Compter avec des cailloux*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2001.
[15] B. MAITTE, «La Lumière», Collection Points Sciences S28, 1981, p. 27.
[16] A. WARUSFEL, «Les nombres et leurs mystères» Collection Points Sciences S21, Ed. Du Seuil, 1961.
[17] E. GARRISON, *A History of Engineering and Technology*, CRC Press, Second Edition, 1998, Chapter 2 «Early Empires and the conquest of materials», pp. 15-43.